1. **Datos:** $\vec{u} = (h, 0, \sqrt{3})$; $\pi:\ x = 1$, con $\vec{n} = (1, 0, 0)$.
2. **Ángulo recta–plano:** $\operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{|h|}{\sqrt{h^2+3}}$.
3. **Ecuación:** $3(h^2+3) = 4h^2 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = \pm 3$.

Ejercicio 3.6.4 ← volver

1. **Datos de L:** $\frac{2-2x}{-2} = x - 1$: $L:\ x - 1 = \frac{y+5}{-3} = z$, $P_0(1, -5, 0)$, $\vec{u} = (1, -3, 1)$.
2. **Normal:** $\vec{N}$ es perpendicular a $\vec{u}$ (el plano contiene a L) y a $\vec{v}$:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = (-24 - 5,\ 3 - 8,\ 5 + 9) = (-29, -5, 14).$$

3. **Ecuación:** con $(29, 5, -14)$ y P_0: $29(x-1)+5(y+5)-14z = 0$, es decir, $29x+5y-14z-4 = 0$. Comprobación: $(29, 5, -14) \cdot (3, 5, 8) = 87 + 25 - 112 = 0$.

Ejercicio 3.6.5 ← volver

1. **Recta:** $\vec{u} = (1, 3, 0) \times (0, 0, 1) = (3, -1, 0)$; con $y = 0$: $x = 2$, punto $(2, 0, 7)$. $L:\ x = 2 + 3t,\ y = -t,\ z = 7$.
2. **Sustitución:** $-2(2 + 3t) - 6(-t) + 6(7) = -4 - 6t + 6t + 42 = 38$: queda $38 = 38$ para todo t.
3. **Conclusión:** todo punto de L está en π (además $\vec{u} \cdot \vec{n} = -6 + 6 + 0 = 0$). La intersección es la recta L.

Ejercicio 3.6.6 ← volver

1. **Intersección:** $3 - 2t_M = -1 - t_N$, $-1 + t_M = -3 + t_N$, $2t_M = -4 + 2t_N$. De la segunda, $t_N = t_M + 2$; la tercera queda $2t_M = 2t_M$ (se cumple siempre); la primera da $3 - 2t_M = -3 - t_M$, $t_M = 6$, $t_N = 8$.
2. **Punto:** $A(3 - 12,\ -1 + 6,\ 12) = (-9, 5, 12)$; en N: $(-1 - 8,\ -3 + 8,\ -4 + 16)$, el mismo.
3. **Plano paralelo:** misma normal $(5, -1, 2)$: $5x - y + 2z + D = 0$ con $-45 - 5 + 24 + D = 0$, $D = 26$.

Ejercicio 3.6.7 ← volver

1. **Normal de π_2:** $(4, 0, -2) \times (-4, 8, 0) = (16, 8, 32)$, o $(2, 1, 4)$: es la de π_1, así que son paralelos.
2. **Ecuación de π_2:** por $(0, 0, 2)$ (con $r = s = 0$): $2x + y + 4z = 8$.
3. **Distancia:** $d = \dfrac{|16 - 8|}{\sqrt{4 + 1 + 16}} = \dfrac{8}{\sqrt{21}} = \dfrac{8\sqrt{21}}{21}$.

Ejercicio 3.6.8 ← volver

1. **a)** Por el origen, con $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$: $\vec{p} = r(-1, 1, 1) + s(1, -2, 0)$.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 2,\ 1 - 0,\ 2 - 1) = (2, 1, 1), \qquad \pi:\ 2x + y + z = 0.$$

1. **Centro de cada circunferencia:** el punto de L con parámetro t, $(1, 1+t, 1)$; su plano es $y = 1 + t$, paralelo a $y = 0$.
2. **Circunferencia en ese plano:** se suma $3\cos\theta$ a x y $3\operatorname{sen}\theta$ a z (las dos coordenadas del plano).
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, t) = (1 + 3\cos\theta,\ 1 + t,\ 1 + 3\operatorname{sen}\theta) = (1 + 3\cos\theta,\ 1,\ 1 + 3\operatorname{sen}\theta) + t(0, 1, 0)$: directriz en $y = 1$ y generatrices paralelas a $\hat{\jmath}$.
4. **Cartesiana** (no se pide): $(x-1)^2 + (z-1)^2 = 9$, cilindro circular recto de eje L.

Ejercicio 4C.6.8 ← volver

1. **Forma ordinaria:** $z^2 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$: hiperboloide de dos hojas de eje z, vértices $(0, 0, \pm 1)$.
2. **a) Trazas:** plano XZ ($y = 0$): hipérbola $z^2 - \frac{x^2}{4} = 1$, de eje focal z; plano YZ ($x = 0$): hipérbola $z^2 - \frac{y^2}{9} = 1$.
3. **b) Valores de z:** el primer miembro de la ecuación dada es ≥ 0, así que $z^2 - 1 \geq 0$: $z \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
4. **c) Curva en $z = \sqrt{2}$:** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2 - 1 = 1$, una elipse de semiejes 2 y 3 en el plano $z = \sqrt{2}$: $\vec{p}(t) = (2\cos t,\ 3\operatorname{sen} t,\ \sqrt{2})$, $t \in [0, 2\pi)$.

Ejercicio 4C.6.9 ← volver

1. **a)** $(x+1)(x+2) = 0$: solo aparece x, con un cuadrado igualado a constante. Caso degenerado de la tabla 4C.1.6: **dos planos paralelos** $x = -1$ y $x = -2$, perpendiculares al eje x.
2. **b)** $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$: tres cuadrados con coeficiente 1 igualados a 1: **esfera** de centro $(1, 0, -1)$ y radio 1; $x \in [0, 2]$, $y \in [-1, 1]$, $z \in [-2, 0]$.
3. **c)** $y^2 + z^2 = 2x^2$: tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero: **cono circular** de vértice en el origen y eje x (la variable de signo solitario). Trazas $x = k$: circunferencias de radio $\sqrt{2}\,|k|$; planos $y = 0$ y $z = 0$: rectas $z = \pm\sqrt{2}\,x$ y $y = \pm\sqrt{2}\,x$.
4. **d)** $z + 4 = y^2 - x^2$: dos cuadrados de signo contrario y variable lineal: **paraboloide hiperbólico** con punto silla $(0, 0, -4)$ y eje paralelo a z. Plano $x = 0$: parábola $z + 4 = y^2$, abre hacia arriba; plano $y = 0$: $z + 4 = -x^2$, abre hacia abajo.

Ejercicio 4C.10.1 · Paraboloide dado en forma vectorial ← volver

1. **Despeje:** $x = r\cos\theta$, $y - 3 = r\operatorname{sen}\theta$; sumando los cuadrados, $x^2 + (y-3)^2 = r^2$.
2. **Eliminación de r:** de la tercera, $r^2 = 2 - z$. Entonces $x^2 + (y-3)^2 = 2 - z$.
3. **Identificación:** dos cuadrados del mismo signo igualados a un término lineal en z: se cumple la forma del paraboloide elíptico; los coeficientes de los cuadrados son iguales: **paraboloide circular**. Vértice $(0, 3, 2)$; eje la recta $x = 0$, $y = 3$, paralela al eje z.
4. **Extensión:** el primer miembro es ≥ 0, así que $2 - z \geq 0$: $z \in (-\infty, 2]$ (también $z = 2 - r^2 \leq 2$); abre hacia las z negativas. Las trazas $z = k < 2$ son circunferencias de centro $(0, 3, k)$ y radio $\sqrt{2-k}$.

Ejercicio 4C.10.2 · Ecuaciones vectoriales de un cono y de un hiperboloide de dos

Ejercicio 3.6.13 ← volver

1. **a)** $2(1+2t) - 3(2-t) + 2(-2t) = 3t - 4 = -7$, $t = -1$: $P(-1, 3, 2)$.
2. **b)** Para un punto de L: $2x - 3y + 2z + 7 = 3t + 3$, y $|\vec{n}| = \sqrt{17}$:

$$\frac{|3t+3|}{\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}} \ \Rightarrow\ |t+1| = 1 \ \Rightarrow\ t = 0 \text{ o } t = -2.$$

3. **Puntos:** $t = 0$: $Q(1, 2, 0)$; $t = -2$: $Q(-3, 4, 4)$. Basta dar uno.

Ejercicio 3.6.14 ← volver

1. **Datos:** $2 - z = \frac{z-2}{-1}$: $P_L(-3, -18, 2)$, $\vec{u}_L = (2, 6, -1)$. $\frac{2x-8}{2} = x - 4$: $P_R(4, -8, -5)$, $\vec{u}_R = (1, 2, 0)$.
2. **Producto cruz:** $\vec{u}_L \times \vec{u}_R = (0 + 2,\ -1 - 0,\ 4 - 6) = (2, -1, -2)$, de módulo 3.
3. **a)** $\overrightarrow{P_L P_R} = (7, 10, -7)$; $(7, 10, -7) \cdot (2, -1, -2) = 14 - 10 + 14 = 18 \neq 0$: se cruzan, y $d = \frac{18}{3} = 6$.
4. **b)** $\cos\theta = \dfrac{|2 + 12 + 0|}{\sqrt{41}\,\sqrt{5}} = \dfrac{14}{\sqrt{205}} = \dfrac{14\sqrt{205}}{205}$.

Ejercicio 3.6.15 ← volver

1. **Recta:** $\frac{2x-18}{6} = \frac{x-9}{3}$: $P_0(9, 8, 6)$, $\vec{u} = (3, 1, 0)$; $B(t) = (9 + 3t,\ 8 + t,\ 6)$.
2. **Distancia:** $\overrightarrow{QB} = (10 + 3t,\ 5 + t,\ 2)$ y $|\overrightarrow{QB}|^2 = 9$:

$$(10+3t)^2 + (5+t)^2 + 4 = 9 \ \Rightarrow\ 10t^2 + 70t + 120 = 0 \ \Rightarrow\ t^2 + 7t + 12 = 0.$$

3. **Soluciones:** $t = -3$: $B(0, 5, 6)$; $t = -4$: $B(-3, 4, 6)$. Comprobación: $\overrightarrow{QB} = (1, 2, 2)$ y $(-2, 1, 2)$, los dos de módulo 3.

Ejercicio 3.6.16 ← volver

1. **Normal:** el plano es perpendicular a L: $\vec{n} = (3, -2, 6)$, $|\vec{n}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7$. El plano es $3x - 2y + 6z + D = 0$.
2. **Distancia al origen:** $\dfrac{|D|}{7} = 7 \Rightarrow D = \pm 49$.
3. **Planos:** $3x - 2y + 6z - 49 = 0$ o $3x - 2y + 6z + 49 = 0$; cualquiera de los dos responde.

E.4A · Unidad 4 · Parte A · Curvas polares

Ejercicio 4A.6.1 ← volver

1. **a) C_1:** circunferencia por el polo ($r = a\operatorname{sen}\theta$, $a = 2$), de centro $(0, 1)$ y radio 1.
2. **a) Sustitución:** $\theta = 90^\circ$: $r = 2$, punto $(2, 90^\circ)$; $\theta = 270^\circ$: $r = -2$, punto $(-2, 270^\circ)$, que es el mismo $(2, 90^\circ)$.
3. **a) Polo:** $r = 0$ en $\theta = 0^\circ$: el polo está en C_1 y en la recta. Son dos puntos: el polo y $(2, 90^\circ)$.
4. **b) Identificación:** $r^2 = a^2\cos 2\theta$ con $a = 2$: lemniscata de lazos sobre el eje polar. Existe para $\cos 2\theta \geq 0$: $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ y $135^\circ \leq \theta \leq 225^\circ$.

2. **a) Ecuación vectorial:** las generatrices son paralelas al eje:

$$\vec{p}(\theta, s) = (2\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\theta,\ 3) + s(-1, 2, 1), \quad \theta \in [0, 2\pi),\ s \in \mathbb{R}.$$

3. **Paramétricas:** $x = 2\cos\theta - s$, $y = 2\operatorname{sen}\theta + 2s$, $z = 3 + s$.
4. **Eliminación:** $s = z - 3$; $\cos\theta = \dfrac{x+s}{2} = \dfrac{x+z-3}{2}$; $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y-2s}{2} = \dfrac{y-2z+6}{2}$.
5. **b) Ecuación cartesiana:** $(x + z - 3)^2 + (y - 2z + 6)^2 = 4$; desarrollada, $x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xz - 4yz - 6x + 12y - 30z + 41 = 0$.
6. **Comprobación:** con $z = 3$ queda $x^2 + y^2 = 4$.

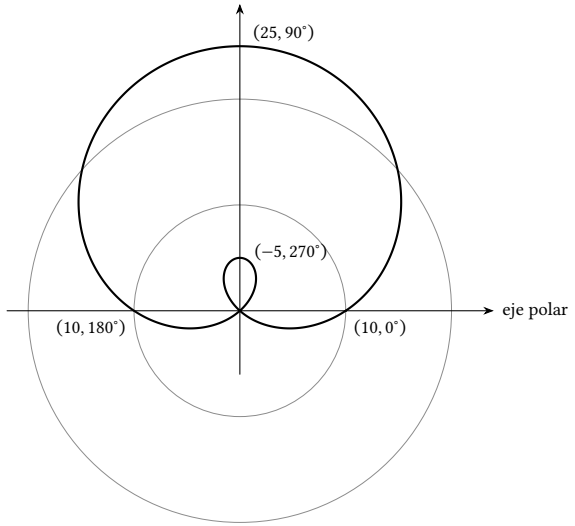
Ejercicio 4C.6.3 ← volver

1. **a)** $(x+1)^2 - 1 + 8y^2 = 23 \Rightarrow \dfrac{(x+1)^2}{24} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. Falta z y los dos cuadrados son positivos: se cumple la forma del **cilindro elíptico**; no es elipsoide.
   - **Eje:** la recta $x = -1$, $y = 0$, paralela al eje z; generatrices paralelas a $\hat{k}$.
   - **Directriz:** elipse de centro $(-1, 0, 0)$ en $z = 0$, semiejes $2\sqrt{6}$ (en x) y $\sqrt{3}$ (en y).
   - **Extensión:** $x \in [-1 - 2\sqrt{6},\ -1 + 2\sqrt{6}]$, $y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, $z \in \mathbb{R}$.
2. **b)** $(x-1)^2 + 3(y+2)^2 + 3z^2 = 9 \Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{3} + \dfrac{z^2}{3} = 1$. Tres cuadrados positivos igualados a 1: **elipsoide**; denominadores de y y z iguales: de revolución alrededor de la recta $y = -2$, $z = 0$.
   - **Centro** $(1, -2, 0)$; semiejes 3, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$.
   - **Trazas:** plano $x = 1$, circunferencia $(y+2)^2 + z^2 = 3$; plano $z = 0$, elipse $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$.
   - **Extensión:** $x \in [-2, 4]$, $y \in [-2 - \sqrt{3},\ -2 + \sqrt{3}]$, $z \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.
3. **c)** $2x^2 - 3y^2 + 5z^2 = 25 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25/2} - \dfrac{y^2}{25/3} + \dfrac{z^2}{5} = 1$. Dos positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** en el origen; **eje** y.
   - **Trazas:** plano $y = 0$ (garganta), elipse $2x^2 + 5z^2 = 25$, de semiejes $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ y $\sqrt{5}$; planos $x = 0$ y $z = 0$, hipérbolas.
   - **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4C.6.4 ← volver

1. **a)** $\dfrac{(x+2)^2}{2} + \dfrac{(y-3)^2}{4} - (z-1)^2 = 1$. Dos positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** $(-2, 3, 1)$; **eje** la recta $x = -2$, $y = 3$, paralela a z.
   - **Trazas:** plano $z = 1$ (garganta), elipse $\frac{(x+2)^2}{2} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$, semiejes $\sqrt{2}$ y 2; planos $x = -2$ y $y = 3$, hipérbolas.
   - **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.
2. **b)** Multiplicando por 4 y despejando la variable lineal: $x - 1 = z^2 - \dfrac{4}{3}(y-2)^2$. Dos cuadrados de signo contrario igualados a una variable lineal: **paraboloide hiperbólico**.

2. **a) Pruebas:** $\theta \to -\theta$ da $r = 10 - 15\operatorname{sen}\theta$; $r \to -r$, $\theta \to 180^\circ - \theta$ da $-r = 10 + 15\operatorname{sen}\theta$. Las dos cambian.
3. **a) Contraejemplo:** $(25, 90^\circ)$ está en la curva. Su simétrico es $(25, 270^\circ)$: $10 + 15\operatorname{sen}270^\circ = -5 \neq 25$; con $(-25, 90^\circ)$: $10 + 15\operatorname{sen}90^\circ = 25 \neq -25$. No es simétrica respecto al eje polar.
4. **b) Eje polar:** $\theta = 0^\circ : r = 10$; $\theta = 180^\circ : r = 10$. Puntos $(10, 0^\circ)$ y $(10, 180^\circ)$.
5. **b) Recta a** 90°**:** $\theta = 90^\circ : r = 25$; $\theta = 270^\circ : r = -5$. Puntos $(25, 90^\circ)$ y $(-5, 270^\circ) = (5, 90^\circ)$: este es el extremo del lazo interior.
6. **b) Polo:** $r = 0 \iff \operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{3}$, que tiene dos soluciones en el tercer y cuarto cuadrantes ($\theta = 180^\circ + \operatorname{ang\,sen}\frac{2}{3}$ y $\theta = 360^\circ - \operatorname{ang\,sen}\frac{2}{3}$). El polo pertenece a la curva y a las dos rectas.
7. **b) Comprobación en cartesianas:** $r^2 = 10r + 15r\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \left(x^2 + y^2 - 15y\right)^2 = 100\left(x^2 + y^2\right)$. Con $y = 0$: $x^4 = 100x^2$, $x = 0, \pm 10$. Con $x = 0$: $y^2(y-15)^2 = 100y^2$, $y = 0$, $y = 5$ o $y = 25$. Coinciden.



E.4B · Unidad 4 · Parte B · Curvas en el espacio

Ejercicio 4B.6.1 ← volver

1. **Simplificación:** $\dfrac{4}{\csc\theta} = 4\operatorname{sen}\theta$, definida solo si $\operatorname{sen}\theta \neq 0$ ($\csc\theta$ no existe en $\theta = k\pi$). Paramétricas: $x = -1 + 2\cos\theta$, $y = 5$, $z = 3 + 4\operatorname{sen}\theta$, $\theta \neq k\pi$.
2. **a) Identidad:** $\cos\theta = \frac{x+1}{2}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{z-3}{4}$; con $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$:

$$C: \quad \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{16} = 1, \qquad y = 5.$$

3. **b) Identificación:** elipse en el plano $y = 5$, centro $(-1, 5, 3)$, eje mayor paralelo al eje

Comprobación: $-2+1+1=0$ y $2-2+0=0$.

2. **b)** $d=\dfrac{|6+0-1|}{\sqrt{6}}=\dfrac{5}{\sqrt{6}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$.
3. **c)** Dirección $\vec{n}=(2,1,1)$, por C: $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{1}$.

Ejercicio 3.6.9 ← volver

1. **a)** Paralelos: $(1,\beta,1)=k(3,-1,3)$; de la primera componente $k=\frac{1}{3}$, y $\beta=-\frac{1}{3}$. Contiene al origen: $D=0$.
2. **b)** $d=\dfrac{|-9|}{\sqrt{9+1+9}}=\dfrac{9}{\sqrt{19}}=\dfrac{9\sqrt{19}}{19}$.
3. **c)** Punto de π_1: $(3,0,0)$. Dos vectores perpendiculares a $(3,-1,3)$: $(1,3,0)$ y $(0,3,1)$ $(3-3=0,\,-3+3=0)$. $\pi_1:\ \vec{p}=(3,0,0)+r(1,3,0)+s(0,3,1)$.
4. **d)** Dirección $(3,-1,3)$, por A: $x=3t,\ y=-t,\ z=3+3t$.

Ejercicio 3.6.10 ← volver

1. **a)** Dirección $\vec{n}_1=(2,3,4)$, por A: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{4}$.
2. **b)** $d=\dfrac{|-4+3+8-8|}{\sqrt{4+9+16}}=\dfrac{1}{\sqrt{29}}=\dfrac{\sqrt{29}}{29}$.
3. **c)** Vectores de π_2: $(2,3,4)$ y $\overrightarrow{AB}=(-4,0,3)$ (no paralelos). Por A: $x=2+2r-4s$, $y=1+3r$, $z=-1+4r+3s$. Con $r=0$, $s=1$ se obtiene B.

Ejercicio 3.6.11 ← volver

1. **a)** $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=1+2-3=0$: los planos son perpendiculares, $\theta=90^\circ$.
2. **Dirección:** $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\1&-2&3\\1&-1&-1\end{vmatrix}=(2+3,\ 3+1,\ -1+2)=(5,4,1)$.
3. **Punto:** con $z=0$: $x-2y=1$, $x-y=-1$; restando, $y=-2$, $x=-3$. $(-3,-2,0)$ cumple las dos.
4. **b)** $L:\ x=-3+5t,\ y=-2+4t,\ z=t$.

Ejercicio 3.6.12 ← volver

1. **Normal de π_2:** $(-3,3,0)\times(-2,0,2)=(6,6,6)$, o $(1,1,1)$. Por $(4,0,0)$: $\pi_2:\ x+y+z=4$ (sumando las paramétricas: $x+y+z=4$).
2. **a)** $(3,2,1)$ y $(1,1,1)$ no son proporcionales: no se cumple el paralelismo. Los planos se cortan en una recta y la distancia entre ellos es 0.
3. **b)** Paralela a los dos planos: dirección perpendicular a las dos normales,

$$\vec{u}=(3,2,1)\times(1,1,1)=(2-1,\ 1-3,\ 3-2)=(1,-2,1).$$

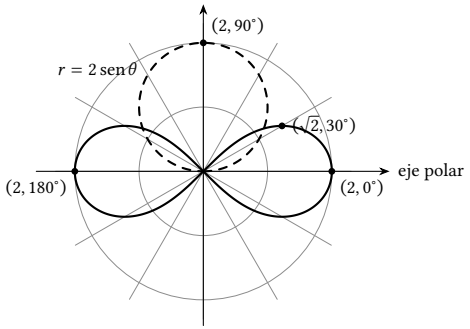
$L:\ x=2+t,\ y=3-2t,\ z=-1+t$.

Observación. La fórmula $\frac{|D_1-D_2|}{|\vec{n}|}$ solo vale para planos paralelos; aplicarla aquí da un número sin sentido.

hojas ← volver

1. **a)** Vértice $(1,-1,0)$ y eje paralelo al eje z. Con $\frac{z}{3}=r$, el primer miembro debe valer r^2: $x-1=r\cos\theta$, $\frac{y+1}{2}=r\operatorname{sen}\theta$. Comprobación: $r^2\cos^2\theta+\frac{4r^2\operatorname{sen}^2\theta}{4}=r^2=\frac{(3r)^2}{9}$. Con $r<0$ se obtiene la hoja de abajo.
2. **b)** Escrita como $z^2-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)=1$, se usa $\sec^2\varphi-\tan^2\varphi=1$: $z=\sec\varphi$, $\frac{x}{2}=\tan\varphi\cos\theta$, $\frac{y}{3}=\tan\varphi\operatorname{sen}\theta$. Comprobación: $\sec^2\varphi-\tan^2\varphi(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)=1$.
3. Con $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $\sec\varphi\geq 1$: la hoja de arriba ($z\geq 1$); con $\varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, $\sec\varphi\leq -1$: la de abajo ($z\leq -1$).

5. **b) Puntos:** $\theta = 0^\circ : r^2 = 4$, $r = \pm 2$: $(2, 0^\circ)$ y $(-2, 0^\circ) = (2, 180^\circ)$. $\theta = 30^\circ : r^2 = 4\cos 60^\circ = 2$, $\left(\sqrt{2}, 30^\circ\right)$. En $\theta = 45^\circ$, $r = 0$.
6. **b) Bosquejo:** $\theta \to -\theta$ y $r \to -r$ no cambian la ecuación: simétrica respecto al eje polar y al polo (y, por tanto, a la recta a 90°). Se dibuja el lazo de 0° a 45° y se refleja.



Ejercicio 4A.6.2 ← volver

1. **a) Prueba 1** ($\theta \to -\theta$): $r = 2 + 2\cos(-\theta) = 2 + 2\cos\theta$. No cambia: es simétrica respecto al eje polar.
2. **b) Sustitución:** $\theta = 0^\circ : r = 4$, punto $(4, 0^\circ)$; $\theta = 180^\circ : r = 0$, el polo.
3. **b) Polo y valores negativos:** $r = 0$ solo en $\theta = 180^\circ$, y $r \geq 0$ siempre: no hay más puntos. En cartesianas, $\left(x^2 + y^2 - 2x\right)^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$ con $y = 0$ da $x^2(x-2)^2 = 4x^2$, $x = 0$ o $x = 4$.
4. **c) Identificación:** $r = a + b\cos\theta$ con $a = b = 2$, es decir, una cardioide. Tabla: $\theta = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 180^\circ$ dan $r = 4, 3, 2, 1, 0$; la mitad de abajo es el reflejo. Es la curva del inciso a del ejemplo 4A.4 (figura de esa sección).

Ejercicio 4A.6.3 ← volver

1. **a) Sustitución:** $\theta = 0^\circ : r = 1$, punto $(1, 0^\circ)$; $\theta = 180^\circ : r = -1$, punto $(-1, 180^\circ)$, que es el mismo $(1, 0^\circ)$.
2. **a) Polo:** $r = 0$ en $\theta = 90^\circ$: el polo está en C. Intersecciones: $(1, 0^\circ)$ y el polo.
3. **b) Prueba 1** ($r \to -r$): $-r = \cos\theta$. Cambia. **Prueba 2** ($\theta \to \theta + 180^\circ$): $r = \cos(\theta + 180^\circ) = -\cos\theta$. Cambia. Las pruebas no deciden.
4. **b) Contraejemplo:** $(1, 0^\circ)$ está en C; su simétrico respecto al polo es $(1, 180^\circ) = (-1, 0^\circ)$. Con $(1, 180^\circ)$: $\cos 180^\circ = -1 \neq 1$; con $(-1, 0^\circ)$: $\cos 0^\circ = 1 \neq -1$. No es simétrica respecto al polo.
5. **c) Cartesiana:** $r^2 = r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = x \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Multiplicar por r no agrega puntos: el polo ya estaba en C. Circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{1}{2}$, tangente a la recta a 90° en el polo.

Ejercicio 4A.6.4 ← volver

1. **Nombre:** $r = a + b\,\mathrm{sen}\,\theta$ con $a = 10 < b = 15$: caracol con lazo interior, simétrico respecto a la recta a 90° ($\theta \to 180^\circ - \theta$ no cambia la ecuación).

- **Punto silla** $(1, 2, 0)$; eje paralelo a x (la recta $y = 2$, $z = 0$).
- **Trazas:** plano $y = 2$, parábola $x - 1 = z^2$, abre hacia x positivo; plano $z = 0$, parábola $x - 1 = -\frac{4}{3}(y-2)^2$, abre hacia x negativo; plano $x = 1$, rectas $z = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}(y-2)$.
- **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.

3. **c)** Pasando $-2z^2$ al primer miembro: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Tres cuadrados con coeficiente 1 igualados a una constante positiva: **esfera** de centro $(0, 0, 0)$ y radio $\sqrt{2}$; $x, y, z \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Ejercicio 4C.6.5 ← volver

1. **a) Completar cuadrados:** $2\left(x^2 + \frac{x}{2}\right) = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ y $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$:

$$2\left(x + \tfrac{1}{4}\right)^2 + (y-1)^2 + 2z^2 = \tfrac{17}{8} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2}{17/16} + \frac{(y-1)^2}{17/8} + \frac{z^2}{17/16} = 1.$$

Tres cuadrados positivos igualados a 1: **elipsoide**; los denominadores de x y z son iguales: de revolución alrededor de la recta $x = -\frac{1}{4}$, $z = 0$ (paralela a y).

- **Centro** $\left(-\frac{1}{4}, 1, 0\right)$; semiejes $\frac{\sqrt{17}}{4}$ (en x y en z) y $\sqrt{\frac{17}{8}} = \frac{\sqrt{34}}{4}$ (en y).
- **Trazas:** plano $y = 1$, circunferencia $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + z^2 = \frac{17}{16}$; planos $x = -\frac{1}{4}$ y $z = 0$, elipses.
- **Extensión:** $x \in \left[-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}, -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right]$, $y \in \left[1 - \frac{\sqrt{34}}{4}, 1 + \frac{\sqrt{34}}{4}\right]$, $z \in \left[-\frac{\sqrt{17}}{4}, \frac{\sqrt{17}}{4}\right]$.

2. **b)** $\frac{(y+1)^2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(z-1)^2}{4} = 0$. Tres cuadrados con signos mixtos igualados a cero: **cono**; los denominadores de x y z son distintos: cono elíptico.
   - **Vértice** $(2, -1, 1)$; **eje** la recta $x = 2$, $z = 1$, paralela a y (la variable de signo solitario).
   - **Trazas:** $y = k \neq -1$, elipses $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(z-1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2}{2}$; plano $z = 1$, rectas $y + 1 = \pm(x - 2)$; plano $x = 2$, rectas $z - 1 = \pm\sqrt{2}\,(y + 1)$.
   - **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.
3. **c)** $(x+1)^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$. Dos positivos y uno negativo igualados a 1: **hiperboloide de una hoja**.
   - **Centro** $(-1, 0, 0)$; **eje** la recta $x = -1$, $y = 0$, paralela a z.
   - **Trazas:** plano $z = 0$ (garganta), elipse $(x+1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$; plano $x = -1$, hipérbola $y^2 - z^2 = 4$; plano $y = 0$, hipérbola $(x+1)^2 - \frac{z^2}{4} = 1$.
   - **Extensión:** $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4C.6.6 ← volver

1. **Directriz:** circunferencia de radio $\sqrt{2}$ en $y = 0$: $\vec{q}(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta,\ 0,\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta)$.
2. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = (0, 1, 0) + s(\sqrt{2}\cos\theta,\ -1,\ \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
3. **Eliminación:** $y = 1 - s \Rightarrow s = 1 - y$; $x^2 + z^2 = 2s^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta) = 2s^2$.
4. **Ecuación cartesiana:** $x^2 + z^2 = 2(y-1)^2$: cono circular de vértice $(0, 1, 0)$ y eje y.

Ejercicio 4C.6.7 ← volver

z; $a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$. Vértices $(-1, 5, 7)$ y $(-1, 5, -1)$; extremos del eje menor $(1, 5, 3)$ y $(-3, 5, 3)$; focos $\big(-1, 5, 3 \pm 2\sqrt{3}\big)$.

4. **Puntos excluidos:** en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ la ecuación vectorial no está definida; esos valores darían $(1, 5, 3)$ y $(-3, 5, 3)$, los extremos del eje menor. La curva es la elipse sin esos dos puntos.
5. **Bosquejo:** en el plano vertical $y = 5$ (paralelo al plano XZ), una elipse alargada en la dirección de z, de $z = -1$ a $z = 7$ y de $x = -3$ a $x = 1$, con puntos vacíos en $(1, 5, 3)$ y $(-3, 5, 3)$.

Ejercicio 4B.6.2 ← volver

1. **a) Paramétricas:** $x = -3$, $y = 2 - 5\,\mathrm{sen}^2 t$, $z = 4 - 3\,\mathrm{sen}\, t$. Las tres funciones existen para todo real: el intervalo paramétrico es $t \in \mathbb{R}$ (con $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se recorre la curva una vez).
2. **b) Despeje:** $\mathrm{sen}\, t = \frac{4-z}{3}$; sustituyendo en y:

$$y = 2 - 5 \cdot \frac{(z-4)^2}{9} \quad \Longrightarrow \quad (z-4)^2 = -\frac{9}{5}(y-2).$$

   Cartesianas: $(z-4)^2 = -\frac{9}{5}(y-2)$, $x = -3$. Es una parábola en el plano $x = -3$, vértice $(-3, 2, 4)$, eje paralelo al eje y, abre hacia las y negativas ($4p = -\frac{9}{5}$, $p = -\frac{9}{20}$).
3. **Intervalo de z:** $-1 \le \mathrm{sen}\, t \le 1 \Rightarrow -3 \le -3\,\mathrm{sen}\, t \le 3 \Rightarrow z \in [1, 7]$.
4. **Intervalo de y:** $0 \le \mathrm{sen}^2 t \le 1 \Rightarrow -5 \le -5\,\mathrm{sen}^2 t \le 0 \Rightarrow y \in [-3, 2]$.
5. **Recorte:** solo se recorre el arco de la parábola entre $(-3, -3, 1)$ y $(-3, -3, 7)$, que pasa por el vértice $(-3, 2, 4)$.

Ejercicio 4B.6.3 ← volver

1. **a)** $\mathrm{sen}\, 2\theta$ y $\cos\theta$ existen para todo real: $\theta \in \mathbb{R}$. Las dos funciones tienen periodo que divide a 2π, así que $\theta \in [0, 2\pi)$ recorre la curva una vez.
2. **b)** $-1 \le \mathrm{sen}\, 2\theta \le 1 \Rightarrow x \in [2, 4]$; $-1 \le \cos\theta \le 1 \Rightarrow z \in [-1, 1]$. (Además $y = -7$.)
3. **c) Despeje:** $x - 3 = \mathrm{sen}\, 2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$ y $\cos\theta = z$. Al elevar al cuadrado y usar $\mathrm{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$:

$$(x-3)^2 = 4\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta = 4\big(1 - z^2\big)z^2.$$

   Cartesianas: $y = -7$, $(x-3)^2 = 4z^2\big(1 - z^2\big)$.
4. **Observación:** la ecuación es de cuarto grado: no es una cónica. Es una curva cerrada en forma de ocho en el plano $y = -7$, que se cruza en $(3, -7, 0)$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$). El problema no pide identificarla.

Ejercicio 4B.6.4 ← volver

1. **a) Condiciones:** $9 - t \ge 0 \Rightarrow t \le 9$; la raíz de z está en el denominador: $t + 16 > 0 \Rightarrow t > -16$. Intervalo paramétrico: $t \in (-16, 9]$.
2. **b) x:** $9 - t$ recorre $[0, 25)$ (vale 0 en $t = 9$ y se acerca a 25 cuando $t \to -16^+$), así que $\sqrt{9-t} \in [0, 5)$ y $x \in [-3, 2)$. El 2 no se alcanza porque $t = -16$ está excluido.

3. **z:** $t + 16$ recorre $(0, 25]$, $\sqrt{t+16} \in (0, 5]$ y $z = \frac{2}{\sqrt{t+16}}$ es decreciente: $z = \frac{2}{5}$ en $t = 9$ y $z \to \infty$ cuando $t \to -16^+$. Entonces $z \in \left[\frac{2}{5}, \infty\right)$.
4. **Observación:** la curva está en el plano $y = -1$ y y toma solo ese valor.

Ejercicio 4B.6.5 ← volver

1. **a)** En $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t$ va de 0 a 1 y regresa a 0: $0 \le \cos t \le 1$, así que $z \in [0, 2]$. (Y $\mathrm{sen}\, t \in [-1, 1]$ da $y \in [-2, 2]$.)
2. **b) Vectorial:** $\vec{p} = (-1,\ 2\,\mathrm{sen}\, t,\ 2\cos t) = (-1, 0, 0) + 2\,\mathrm{sen}\, t\,\hat{\jmath} + 2\cos t\,\hat{k}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. **c) Cartesianas:** $\mathrm{sen}\, t = \frac{y}{2}$, $\cos t = \frac{z}{2}$; con $\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$: $y^2 + z^2 = 4$, $x = -1$, con $z \ge 0$.
4. **Identificación:** semicircunferencia en el plano $x = -1$, de centro $(-1, 0, 0)$ y radio 2: la mitad con $z \ge 0$, de $(-1, -2, 0)$ a $(-1, 2, 0)$ pasando por $(-1, 0, 2)$.

Ejercicio 4B.6.6 ← volver

1. **a)** $x = 8$, $y = 2t$, $z = \frac{2}{t}$.
2. **b) Eliminación:** $t = \frac{y}{2}$ y $z = \frac{2}{y/2} = \frac{4}{y}$. Cartesianas: $yz = 4$, $x = 8$.
3. **c)** $\frac{2}{t}$ exige $t \ne 0$: $t \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
4. **Identificación:** hipérbola equilátera en el plano $x = 8$, con centro $(8, 0, 0)$ y asíntotas las rectas $y = 0$ y $z = 0$ de ese plano. Sus vértices están sobre la recta $y = z$: $(8, 2, 2)$ y $(8, -2, -2)$; $a = 2\sqrt{2}$. Con $t > 0$ se recorre la rama con $y, z > 0$; con $t < 0$, la otra.

E.4C · Unidad 4 · Parte C · Superficies cuádricas

Ejercicio 4C.6.1 ← volver

1. **Directriz:** $\vec{q}(\theta) = (-2 + 2\cos\theta,\ 1 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0)$.
2. **Dirección:** $\vec{q}(\theta) - \vec{v} = (-5 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ -7)$.
3. **Ecuación vectorial:** $\vec{p}(\theta, s) = (3, -2, 7) + s(-5 + 2\cos\theta,\ 3 + 3\,\mathrm{sen}\,\theta,\ -7)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$.
4. **Eliminación de s:** $z = 7 - 7s \Rightarrow s = \dfrac{7-z}{7}$.
5. **Eliminación de θ:**

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{s} + 5\right) = \frac{7x - 5z + 14}{2(7-z)}, \qquad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{3}\left(\frac{y+2}{s} - 3\right) = \frac{7y + 3z - 7}{3(7-z)}.$$

6. **Identidad:** $\dfrac{(7x-5z+14)^2}{4(7-z)^2} + \dfrac{(7y+3z-7)^2}{9(7-z)^2} = 1$; multiplicando por $36(7-z)^2$:

$$9(7x - 5z + 14)^2 + 4(7y + 3z - 7)^2 = 36(z-7)^2.$$

7. **Comprobación:** con $z = 0$: $9 \cdot 49(x+2)^2 + 4 \cdot 49(y-1)^2 = 36 \cdot 49$, que es la elipse dada; el vértice da $9(21 - 35 + 14)^2 + 4(-14 + 21 - 7)^2 = 0$.

Ejercicio 4C.6.2 ← volver

1. **Directriz:** $x^2 + y^2 = 4$ en $z = 3$: $\vec{q}(\theta) = (2\cos\theta,\ 2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 3)$.